חדו"א 1מ/2

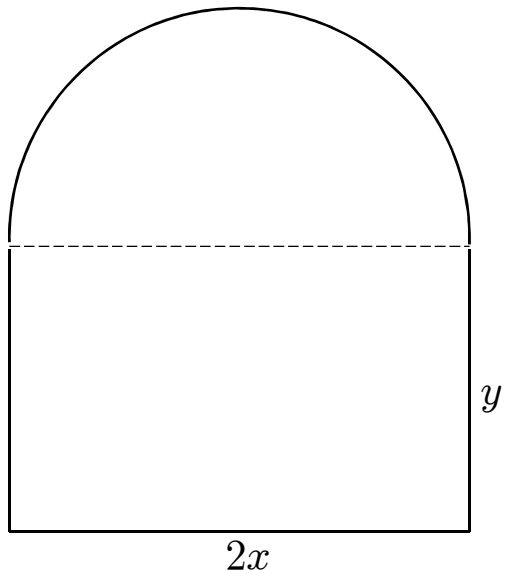
פתרון בחינת סמסטר א' מועד א' 2013

חלק א: בחלק זה עליך לענות על כל אחת מחמש השאלות ע"י סימון התשובה הנכונה לדעתך אך ורק במקום המיועד לכך בדף השער של הבחינה. סימון התשובה נכונה תזכה אותך ב- 12 נקודות. סימון של יותר מתשובה אחת יפסול את תשובתך ויגרור הורדת 2 נקודות.

גרסה א'

שאלה 1: לחלון שצורתו (ראה התרשים למטה) מלבן שעל צלעו העליונה מונח חצי עיגול שקטרו שווה לאורך הצלע העליונה, יש היקף נתון $p=\sqrt{2}(\pi+4)$. מהו השטח המכסימלי של חלון (=שטח המלבן+שטח חצי העיגול) בצורה זאת ובהיקף זה?

תרשים החלון



א. $\boldsymbol{\pi+4}$ ב. $2(\pi+4)$ ג. $\frac{\pi+4}{2}$ ד. $\frac{\pi+4}{3}$

ה. $\frac{2(\pi+4)}{3}$.

<u>התשובה הנכונה היא א'</u>. נסמן_את אורך הבסיס של החלון=קוטר חצי המעגל= $2x$, את אורך הצלע הצדדית של המלבן ב- y. לכן אם ההיקף של החלון הוא $p=c(\pi+4)$, עבור $c=\sqrt{2}$, נקבל את המשוואה:

$$2x+2y+\pi x=c(\pi+4)$$

ולכן

$$2y=c(\pi+4)-(\pi+2)x.$$

מצד שני שטח החלון הוא:

$$A=2xy+\frac{1}{2}\pi x^2=x(c(\pi+4)-(\pi+2)x)+\frac{1}{2}\pi x^2=$$

$$=c(\pi+4)x-(\pi+2)x^2+\frac{1}{2}\pi x^2=$$

$$=c(\pi+4)x-\frac{1}{2}(\pi+4)x^2=f(x)$$

הדרישה היא למצוא את הערך המכסימלי של הפונקציה הנ"ל $f(x)$ עבור

$$x>0, \qquad 2y=c(\pi+4)-(\pi+2)x>0$$

כלומר על הקטע

$$0<x<c\frac{\pi+4}{\pi+2}$$

חישוב הנגזרת של $f(x)$ נותן ל-

$$f'(x)=c(\pi+4)-(\pi+4)x=(\pi+4)(c-x)$$

מכאן מוצאים שהנגזרת הזאת מתאפסת בנקודה הבאה

$$0<x_1=c<c\frac{\pi+4}{\pi+2}\ ,$$

הנמצאת בפנים הקטע הנתון לעיל. כמו כן מוצאים שהנגזרת חיובית עבור

$$0<x<x_1=c\ ,$$

והיא שלילית עבור

$$x_1 = c < x < c\frac{\pi + 4}{\pi + 2}$$

כלומר, לפי תוצאות ממשפט לגרנג' יוצא שהפונקציה $f(x)$ הינה מונוטונית עולה ממש בחלק השמאלי של הקטע המדובר, ומונוטונית יורדת ממש בחלק הימני של אותו קטע ולאור זאת ברור שהנקודה $x_1 = c$ היא נקודת המקסימום של הפונקציה $f(x)$ על הקטע $0 < x < c\frac{\pi+4}{\pi+2}$. אי-לכך, הערך המקסימלי של השטח של החלון הוא

$$f(c) = c(\pi + 4)c - \frac{1}{2}(\pi + 4)c^2 = \frac{c^2}{2}(\pi + 4)$$

וכאשר מציבים $c=\sqrt{2}$ מקבלים שהשטח הגדול ביותר הוא $(\boldsymbol{\pi} + \mathbf{4})$.

<u>שאלה 2</u>: חשב את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x}\right)$$

א. ∞ , **ב.** $\boxed{-1}$, ג. $\frac{1}{2}$, ד. $\frac{3}{2}$, ה. איננו קיים.

<u>התשובה הנכונה היא ב'.</u> נרשום שבר אחד עם מכנה משותף

$$\frac{2}{e^{2x} - 1} - \frac{1}{x} = \frac{2x + 1 - e^{2x}}{x(e^{2x} - 1)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

נשתמש בכלל ל'הופיטל פעמיים (שכן כל הדרישות של כלל זה מתקיימות גם לגבי שתי הפונקציות במונה ובמכנה וגם לגבי נגזרותיהן), ומכיוון ש-

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-4e^{2x}}{4e^{2x} + 2xe^{2x}} = -\frac{2}{2 + x} \to -1 \;\; as\; x \to 0$$

נובע מייד שהגבול המבוקש הוא **-1**.

<u>שאלות 3-4</u>: בשתי השאלות הבאות הפונקציה הנתונה היא

$$f(x) = \frac{3}{4}(x^2 - 1) - \frac{1}{6}\ln(x)\,, \qquad 0 < x \le 1$$

<u>שאלה 3</u>:. נתון האינטגרל המוכלל:

$$I = \int_0^1 f(t)\,dt$$

אזי

א. $I = \frac{11}{72}$, ב. $I = \frac{1}{12}$, ג. $I = -\frac{1}{12}$,

$$\boxed{\text{ד. } \boldsymbol{I = -\frac{1}{3}}}$$

ה. אינטגרל מוכלל זה איננו מתכנס.

<u>התשובה הנכונה היא ד'.</u> החישוב הוא:

$$I = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}(t^2 - 1) - \frac{1}{6}\ln(t)\right) dt =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{t^3}{3} - t\right) - \frac{1}{6}\lim_{b\to 0+}(t\,ln(t) - t)\Big]_{t=b}^{t=1} =$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \frac{1}{6}\left(-1 - \lim_{b\to 0+} b\,ln(b)\right)$$

ומכיוון שהוכחנו בקורס ש- $\lim_{b\to 0+} b\,ln(b) = 0$ (למשל בעזרת כלל ל'הופיטל כשהופכים את המכפלה $b\,ln(b)$ למנה $\frac{ln(b)}{1/b}$) יוצא ש-

$$I = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$$

<u>שאלה 4</u>: תהי $0<c<1$ נקודת ההתאפסות של הפונקציה $f(x)$ בפנים הקטע $(0,1)$, אזי האורך של חלק הגרף של $f(x)$, המחבר את $(1,0)$ עם $(c,0)$, הוא

א. $\frac{1-c^2}{3}$ ב. $1-c^2$ ג. $\frac{2}{3}(1-c^2)$ ד. $2(1-c^2)$

ה. $\boxed{\frac{3}{2}(1-c^2)}$

<u>רמז</u>: בשאלה 4 לשים לב לכך שלפי הגדרת $f(x)$, הנקודה c מקיימת את המשוואה

$$\ln(c)=\frac{9}{2}(c^2-1)$$

<u>התשובה הנכונה היא ה'.</u> יש להשתמש בנוסחת אורך גרף של פונקציה שלפיה האורך מחושב ע"י

$$\int_c^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

ומכיוון ש-

$$f'(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{6x}$$

מוצאים ש-

$$1+f'(x)^2=1+\frac{9}{4}x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{36x^2}=\frac{9}{4}x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{36x^2}=$$

$$=\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{6x}\right)^2$$

ולפיכך

$$\int_c^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_c^1\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{6x}\right)dx=$$

$$=\frac{3}{4}(1-c^2)+\frac{1}{6}(\ln(1)-\ln(c))==\frac{3}{4}(1-c^2)-\frac{1}{6}\ln(c)=$$

$$= \frac{3}{4}(1-c^2) - \frac{1}{6}\,\frac{9}{2}(c^2-1) = \boldsymbol{\frac{3}{2}(1-c^2)}$$

<u>שאלה 5</u>: הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)}$$

מתכנס ל-

א. 1 , ב. $\frac{1}{3}$, **ג.** $\boldsymbol{\frac{1}{4}}$ **,** ד. $-\frac{1}{3}$, ה. הטור מתבדר.

<u>התשובה הנכונה היא ג'.</u> משתמשים בפרוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \pm \cdots\right\}$$

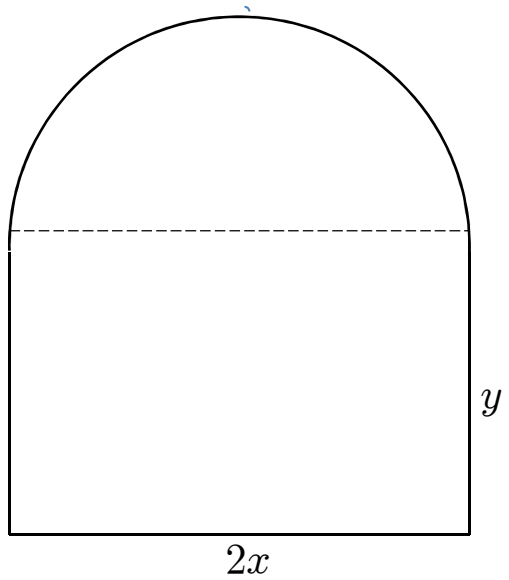
ובשימוש בכך שהטור המתקבל הוא "טלסקופי" יוצא ש-

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

גרסה ב'

<u>שאלה 1</u>: לחלון שצורתו (ראה התרשים למטה) מלבן שעל צלעו העליונה מונח חצי עיגול שקטרו שווה לאורך הצלע העליונה, יש היקף נתון $p=2(\pi+4)$. מהו השטח המכסימלי של חלון (=שטח המלבן+שטח חצי העיגול) בצורה זאת ובהיקף זה?

<u>תרשים החלון</u>



א. $\pi+4$ **ב. $2(\pi+4)$** ג. $\frac{\pi+4}{2}$ ד. $\frac{\pi+4}{3}$

ה. $\frac{2(\pi+4)}{3}$.

<u>התשובה הנכונה היא ב'</u>. לפי הפיתוח הכללי שבגרסה א' ידוע שכאשר היקף החלון הוא $p=c(\pi+4)$ אזי הערך המקסימלי של השטח של החלון הוא

$$f(c)=c(\pi+4)c-\frac{1}{2}(\pi+4)c^2=\frac{c^2}{2}(\pi+4)$$

וכאשר מציבים $c=2$ מקבלים שהשטח הגדול ביותר הוא $2(\pi+4)$.

<u>שאלה 2</u>: חשב את הגבול הבא

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$$

א. ∞ , ב. -1 , $\boxed{\textbf{ג.}\ \ \frac{1}{2}}$, ד. $\frac{3}{2}$, ה. איננו קיים.

<u>התשובה הנכונה היא ג'.</u> נרשום שבר אחד עם מכנה משותף

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

נשתמש בכלל ל'הופיטל פעמיים (שכן כל הדרישות של כלל זה מתקיימות גם לגבי שתי הפונקציות במונה ובמכנה וגם לגבי נגזרותיהן), ומכיוון ש-

$$\frac{f''(x)}{g''(x)}=\frac{e^x}{(x+2)e^x}=\frac{1}{2+x}\to\frac{1}{2}\quad as\ x\to 0$$

נובע מייד שהגבול המבוקש הוא $\frac{1}{2}$.

<u>שאלות 3-4</u>: בשתי השאלות הבאות הפונקציה הנתונה היא

$$f(x)=\frac{x^2-1}{2}-\frac{1}{4}\ln(x)\,,\qquad 0<x\le 1$$

<u>שאלה 3</u>:. נתון האינטגרל המוכלל:

$$I=\int_0^1 f(t)\,dt$$

אזי

א. $I=\frac{11}{72}$, ב. $I=\frac{1}{12}$,

$\boxed{\textbf{ג.}\ \ I=-\frac{1}{12}}$,

ד. $I=-\frac{1}{3}$, ה. אינטגרל מוכלל זה איננו מתכנס.

<u>התשובה הנכונה היא ג'.</u> החישוב הוא:

$$I=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(t^2-1)-\frac{1}{4}\ln(t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)-\frac{1}{4}\lim_{b\to 0+}(t\,ln(t)-t)\Big]_{t=b}^{t=1}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{1}{4}\left(-1-\lim_{b\to 0+}b\,ln(b)\right)$$

ומכיוון שהוכחנו בקורס ש- $\lim_{b\to 0+}b\,ln(b)=0$ יוצא ש-

$$I=-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{12}}$$

<u>שאלה 4</u>: תהי $0<c<1$ נקודת ההתאפסות של הפונקציה $f(x)$ בפנים הקטע $(0,1)$, אזי האורך של חלק הגרף של $f(x)$, המחבר את $(1,0)$ עם $(c,0)$, הוא

א. $\frac{1-c^2}{3}$ ב. $\boxed{\mathbf{1-c^2}}$ ג. $\frac{2}{3}(1-c^2)$ ד. $2(1-c^2)$

ה. $\frac{3}{2}(1-c^2)$

<u>רמז</u>: בשאלה 4 לשים לב לכך שלפי הגדרת $f(x)$, הנקודה c מקיימת את המשוואה

$$\ln(c)=2(c^2-1)$$

<u>התשובה הנכונה היא ב'.</u> יש להשתמש בנוסחת אורך גרף של פונקציה שלפיה האורך מחושב ע"י

$$\int_c^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

ומכיוון ש-

$$f'(x)=x-\frac{1}{4x}$$

מוצאים ש-

$$1+f'(x)^2=1+x^2-\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}=x^2+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^2}=$$

$$=\left(x+\frac{1}{4x}\right)^2$$

ולפיכך

$$\int_c^1\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_c^1\left(x+\frac{1}{4x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}(1-c^2)+\frac{1}{4}(\ln(1)-\ln(c))=$$

$$=\frac{1}{2}(1-c^2)-\frac{1}{4}\ln(c)=\frac{1}{2}(1-c^2)-\frac{1}{4}2(c^2-1)=$$

$$=(1-c^2)$$

<u>שאלה 5</u>: הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$$

מתכנס ל-

א. 1 , ב. $\frac{1}{3}$, ג. $\frac{1}{4}$, $\boxed{\text{ד. } -\frac{1}{3}\text{ ,}}$ ה. הטור מתבדר.

<u>התשובה הנכונה היא ד'.</u> משתמשים בפרוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$$

ונעזרים בכך שהטור המתקבל הוא "טלסקופי" כך ש-

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)=$$

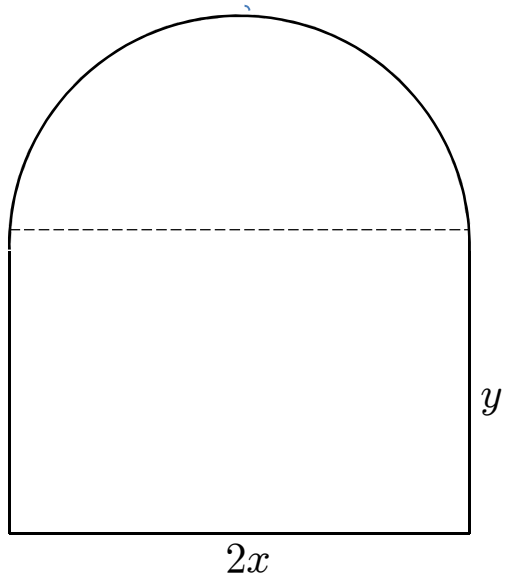
$$=\frac{1}{3}\left\{\begin{array}{c}\left(-1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots\\ +\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)+\cdots\end{array}\right\}=$$

$$=-\mathbf{\frac{1}{3}}$$

גרסה ג'

<u>שאלה 1</u>: לחלון שצורתו (ראה התרשים למטה) מלבן שעל צלעו העליונה מונח חצי עיגול שקטרו שווה לאורך הצלע העליונה, יש היקף נתון $p=(\pi+4)$. מהו השטח המכסימלי של חלון (=שטח המלבן+שטח חצי העיגול) בצורה זאת ובהיקף זה?

<u>תרשים החלון</u>



א. $\pi+4$ ב. $2(\pi+4)$ **ג.** $\boxed{\mathbf{\frac{\pi+4}{2}}}$ ד. $\frac{\pi+4}{3}$

ה. $\frac{2(\pi+4)}{3}$.

<u>התשובה הנכונה היא ג'</u>. לפי בפיתוח הכללי שבגרסה א' יודעים שכאשר היקף החלון הוא $p=c(\pi+4)$ אזי הערך המקסימלי של השטח של החלון הוא

$$f(c) = c(\pi+4)c - \frac{1}{2}(\pi+4)c^2 = \frac{c^2}{2}(\pi+4)$$

וכאשר מציבים $c=1$ מקבלים שהשטח הגדול ביותר הוא $\frac{1}{2}(\pi+4)$.

<u>שאלה 2</u>: חשב את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{3}{x^3-1}\right)$$

א. ∞ , ב. -1 , ג. $\frac{1}{2}$, $\boxed{\text{ד. } \frac{3}{2}}$ ה. איננו קיים.

<u>התשובה הנכונה היא ד'.</u> נרשום שבר אחד עם מכנה משותף

$$\frac{1}{\ln(x)} - \frac{3}{x^3-1} = \frac{x^3-1-3\ln(x)}{\ln(x)(x^3-1)}$$

נשתמש בכלל ל'הופיטל פעמיים (שכן כל הדרישות של כלל זה מתקיימות גם לגבי שתי הפונקציות במונה ובמכנה וגם לגבי נגזרותיהן), ומכיוון ש-

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{6x + {}^{3}/_{x^2}}{5x + {}^{1}/_{x^2} + 6x\ln(x)} \to \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \quad as\ x \to 1$$

נובע מייד שהגבול המבוקש הוא $\frac{3}{2}$.

<u>שאלות 3-4</u>: בשתי השאלות הבאות הפונקציה הנתונה היא

$$f(x) = \frac{x^2-1}{3} - \frac{3}{8}\ln(x), \qquad 0 < x \le 1$$

<u>שאלה 3</u>:. נתון האינטגרל המוכלל:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

אזי

$\boxed{\text{א. } I=\frac{11}{72},}$ ב. $I=\frac{1}{12},$ ג. $I=-\frac{1}{12},$ ד. $I=-\frac{1}{3},$

ה. אינטגרל מוכלל זה איננו מתכנס.

<u>התשובה הנכונה היא א'.</u> החישוב הוא:

$$I=\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1\left(\frac{1}{3}(t^2-1)-\frac{3}{8}\ln(t)\right)dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)-\frac{3}{8}\lim_{b\to 0+}(t\,ln(t)-t)\Big]_{t=b}^{t=1}=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)-\frac{3}{8}\left(-1-\lim_{b\to 0+}b\,ln(b)\right)$$

ומכיוון שהוכחנו בקורס ש- $\lim_{b\to 0+}b\,ln(b)=0$ יוצא ש-

$$I=-\frac{2}{9}+\frac{3}{8}=\mathbf{\frac{11}{72}}$$

<u>שאלה 4:</u> תהי $0<c<1$ נקודת ההתאפסות של הפונקציה $f(x)$ בפנים הקטע $(0,1)$, אזי האורך של חלק הגרף של $f(x)$, המחבר את $(1,0)$ עם $(c,0)$, הוא

א. $\frac{1-c^2}{3}$ ב. $1-c^2$ $\boxed{\text{ג. } \frac{2}{3}(1-c^2)}$ ד. $2(1-c^2)$

ה. $\frac{3}{2}(1-c^2)$

<u>רמז</u>: בשאלה 4 לשים לב לכך שלפי הגדרת $f(x)$, הנקודה c מקיימת את המשוואה

$$\ln(c)=\frac{8}{9}(c^2-1)$$

<u>התשובה הנכונה היא ג'.</u> יש להשתמש בנוסחת אורך גרף של פונקציה שלפיה האורך מחושב ע"י

$$\int_c^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

ומכיוון ש-

$$f'(x)=\frac{2}{3}x-\frac{3}{8x}$$

מוצאים ש-

$$1+f'(x)^2=1+\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{2}+\frac{9}{64x^2}=\frac{4}{9}x^2+\frac{1}{2}+\frac{9}{64x^2}=$$

$$=\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{8x}\right)^2$$

ולפיכך

$$\int_c^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_c^1\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{8x}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}(1-c^2)+\frac{3}{8}(\ln(1)-\ln(c))=$$

$$=\frac{1}{3}(1-c^2)-\frac{3}{8}\ln(c)=\frac{1}{3}(1-c^2)-\frac{3}{8}\frac{8}{9}(c^2-1)=$$

$$=\frac{2}{3}(1-c^2)$$

<u>שאלה 5</u>: הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

מתכנס ל-

$\boxed{\text{א. } 1\,,}$ ב. $\frac{1}{3}$, ג. $\frac{1}{4}$, ד. $-\frac{1}{3}$, ה. הטור מתבדר.

<u>התשובה הנכונה היא א'.</u> משתמשים בפרוק לשברים חלקיים

$$\frac{2n+1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \left\{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) \pm \cdots\right\}$$

ובשימוש בכך שהטור המתקבל הוא "טלסקופי" יוצא ש-

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)} = 1$$

<u>פתרון חלק ב'</u>

חלק ב: בחלק זה יש לענות על שתי השאלות הפתוחות הבאות, השוות במשקלן ל- 20 נקודות כל אחת. תשובתך חייבת להיות מנומקת ומבוססת. תשובה בלתי מנומקת לא תיחשב.

<u>שאלה 6</u>: א. רשום את פולינום טילור ממעלה חמישית $T_5(x)$ של $f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ סביב הנקודה $x_0=0$.

ב. השתמש בפולינום טילור $T_5(x)$ שמצאת בחלק א' על מנת לחשב קירוב של $ln(3)$? רשום קירוב זה של $ln(3)$ כמספר רציונלי (לא בפיתוח עשרוני).

<u>רמז</u> : להעזר בכך שלפי חוקי הלוגריתמים

$$ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b)$$

<u>פתרון</u>: א. לפי משפט טילור, פולינום טילור ממעלה n, של פונקציה $f(x)$ סביב נקודה x_0 שבסביבתה הפונקציה גזירה לפחות עד סדר n, הינו

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$

$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ע״פ הרמז,

$$f(x) = ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

וחישוב ישיר מראה שלפונקציה זאת יש נגזרות מכל סדר סופי בסביבה של $x_0=0$ כאשר:

$$f(0)=ln(1)-ln(1)=0,$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}, \qquad f'(0) = 2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} + \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad f''(0) = 4$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{(1+x)^4} + \frac{6}{(1-x)^4}, \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5} + \frac{24}{(1-x)^5}, \qquad f^{(4)}(0) = 48$$

ולכן פולינום טילור המבוקש הוא

$$\boxed{T_5(x) = 0 + 2x + 0 + \frac{4}{6}x^3 + 0 + \frac{48}{120}x^5 = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)}$$

ב. על מנת להשתמש בחלק א' לחישוב מקורב של $ln(3)$ יש לבחור את x כך ש-

$$\frac{1+x}{1-x}=3$$

מוצאים ש- $x=\frac{1}{2}$, וכשמציבים זאת בפולינום טילור שמצאנו בחלק א' מקבלים שהקירוב המתאים של $ln(3)$ הוא

$$\boxed{T_5\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\times 2^3}+\frac{1}{5\times 2^5}\right)=1+\frac{1}{12}+\frac{1}{80}=\frac{263}{240}}$$

<u>שאלה 7</u>: הוכח את שני אי-השוויונים

$$\frac{2x}{\pi}\le \sin(x)\le \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

בקטע $0\le x\le \pi/2$.

<u>רמז</u>: חישבו על הקשר בין אי-השוויונים האלו לבין הקמירות או הקעירות של הפונקציה $sin(x)$ בקטע זה .

$$\sin\left({}^{\pi}/_{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\qquad cos\left({}^{\pi}/_{3}\right)=\frac{1}{2}\ ,\qquad \sin\left({}^{\pi}/_{2}\right)=1.$$

<u>פתרון:</u> בקטע הנתון $0\le x\le \pi/2$ הנגזרת השניה של $sin(x)$ היא שלילית בגלל ש-

$sin(x)$ חיובית באותו קטע, ומצד שני הנגזרת השניה של $sin(x)$ היא $-sin(x)$. לפי משפט שהוכח בקורס, ידוע שאם הנגזרת השניה של פונקציה נתונה הינה שלילית (או אי-חיובית) בקטע מסויים, אזי הפונקציה הזאת קעורה על אותו קטע, ולכן נסיק שהפונקציה $sin(x)$ הינה קעורה על הקטע $0\le x\le \pi/2$.

נבחין ראשית שקטע הישר שמשוואתו $y=\frac{2x}{\pi}$ עבור $0\le x\le \pi/2$ הוא קטע ישר המחבר את שתי הנקודות $(0,0)$, $(\pi/2,1)$ ששתיהן שייכות לגרף של $sin(x)$, ומכיוון שזאת פונקציה קעורה עבור $0\le x\le \pi/2$, אזי ע"פ הגדרת פונקציות קעורות,

הקטע הנ״ל חייב להימצא מתחת לגרף הפונקציה בין שתי הנקודות הנ״ל, וזה מבוטא ע״י אי-השוויון $\frac{2x}{\pi} \leq \sin(x)$.

מצד שני למדנו שלפונקציות קעורות בקטע יש התכונה הבאה: עבור כל נקודה x_0 בקטע הקעירות של $f(x)$, הישר המשיק לגרף של $f(x)$ בנקודה $(x_0, f(x_0))$ נמצא מעל לגרף של $f(x)$, כלומר, לגבי פונקציה קעורה מתקיים אי-השוויון הבא:

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad a \leq x \leq b.$$

אם נשתמש בתכונה זאת על הפונקציה הקעורה $f(x) = sin(x)$ עבור $x_0 = \pi/3$

נקבל את אי-השוויון המבוקש הימני:

$$\sin(x) \leq \sin\left(\pi/3\right) + \sin'\left(\pi/3\right)\left(x - \pi/3\right) =$$

$$= cos\left(\pi/3\right)\left(x - \pi/3\right) + \sin\left(\pi/3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

<u>דרך שניה</u> להוכחת שני אי-השוויונים המבוקשים, היא לסמן

$$g(x) = \sin(x) - \frac{2x}{\pi} \quad , \qquad h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(x)$$

ואז מספיק להוכיח ששתי הפונקצית הללו הן אי-שליליות בכל הקטע $0 < x < \pi/2$, או, ליתר דיוק, די להראות שהערך המינימלי של שתיהן בקטע זה הוא אפס.

מצד אחד רואים ש-

$$g(0) = g\left(\pi/2\right) = 0$$

כמו כן

$$g'(x) = \cos(x) - \frac{2}{\pi} \ , \quad g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0 > g'(\pi/2) = -\frac{2}{\pi}$$

$$g''(x) = -\sin(x) < 0, \quad for \quad 0 < x < \pi/2$$

כלומר, לפי תוצאה ממשפט לגרנג', הנגזרת $g'(x)$ הינה מונוטונית יורדת ממש בקטע $0 < x < \pi/2$, מערך חיובי בקצה השמאלי, 0, לערך שלילי בקצה הימני, $\pi/2$, כאשר הנגזרת מתאפסת בנקודה יחידה $x_0 = arccos\left(2/\pi\right)$ בפנים הקטע. אי-לכך, $g'(x) > 0$ בחלק השמאלי $(0,x_0)$ של הקטע הנתון, כך ש- $g(x)$ עולה ממש שם, ו- $g'(x) < 0$ בחלק הימני $(x_0, \pi/2)$, כך ש- $g(x)$ יורדת בו, ומכאן נסיק שלפונקציה $g(x)$ יש בשני קצוות הקטע שתי נקודות מינימום, מה שאומר שלכל x בקטע $0 < x < \pi/2$ מתקיים אי-השוויון

$$g(x) \geq g(0) = g(\pi/2) = 0$$

מה שמוכיח את אי-השוויון

$$\sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}, \quad 0 < x < \pi/2$$

מצד שני, מגזירת

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sin(x)$$

מקבלים ש-

$$h'(x) = \frac{1}{2} - \cos(x),$$

$$h'(0) = -\frac{1}{2} < h'\left(\pi/3\right) = 0 < h'\left(\pi/2\right) = \frac{1}{2}$$

וכן

$$h''(x) = \sin(x) > 0, \qquad 0 < x < {}^{\pi}/_{2}$$

ולפיכך יוצא, לפי תוצאה ממשפט לגרנג', שהנגזרת $h'(x)$ היא עולה ממש בכל הקטע $0 < x < {}^{\pi}/_{2}$ מערך שלילי בקצה השמאלי לערך חיובי בקצה הימני.

מכאן נסיק ש- $h'(x)<0$ בחלק השמאלי $(0, {}^{\pi}/_{3})$, כך ש- $h(x)$ יורדת בחלק זה, ואילו $h'(x)<0$ בחלק הימני $({}^{\pi}/_{3}, {}^{\pi}/_{2})$, כלומר $h(x)$ עולה שם. כל זה מוכיח של- $h(x)$ יש נקודת מינימום ב- ${}^{\pi}/_{3}$ וזה מוביל לאי השוויון הבא

$$h(x) \geq h({}^{\pi}/_{3}) = 0$$

וזה מוכיח את אי-השוויון השני.